

## Olimpiada de matematică Etapa locală - 10 februarie 2023

### Clasa a VIII-a

1.

3p i) Arătați că numerele  $2n+3$  și  $3n+4$  sunt prime între ele, pentru orice număr natural  $n$ .

4p ii) Arătați că fracția  $\frac{5n+7}{6n^2+17n+12}$  este ireductibilă, pentru orice număr natural  $n$ .

Gazeta Matematică nr. 11/2022, enunț modificat

2.

3p i) Dacă  $x, y \in (0, \infty)$ , Să se demonstreze că  $x^2y + xy^2 \leq x^3 + y^3$ .

4p ii) Dacă  $x, y, z \in (0, \infty)$  și  $x+y+z=1$ , să se demonstreze că  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3(x^3 + y^3 + z^3)$

3. Fie punctele necoplanare  $O, A, B, C$ , cu  $m(\angle AOB) = m(\angle BOC) = m(\angle COA) = 90^\circ$ .

Notăm cu  $S$  aria  $\triangle ABC$  și  $OA=x, OB=y, OC=z$ .

3p i) Să se arate că  $S^2 = S_{AOB}^2 + S_{AOC}^2 + S_{BOC}^2$ .

4p ii) Să se demonstreze că perpendiculara din punctul  $O$  pe planul  $(ABC)$  cade în ortocentrul triunghiului  $ABC$ .

4. Fie punctele necoplanare  $A, B, C$  și  $D$ , cu  $AB \perp CD$  și  $AC+AD = BC+BD$ . Să se demonstreze că  $AC = BC$  și  $AD = BD$ .

### NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
  - Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
  - Nu se acordă puncte din oficiu;
  - Punctajul minim de calificare la etapa județeană este de 11,5 puncte;
  - Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.
-